

# Arithmétique dans $\mathbb{N}$

## Exercice 1

1. Montrer que 107 est un nombre premier.
2. Donner les décompositions en facteurs premiers de 2568 et 5400.
3. En déduire  $PGCD(2568; 5400)$  et  $PPCM(2568; 5400)$ .
4. Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $k$  tel que  $(5400 \times k)$  soit un carré.
5. Simplifier  $\sqrt{5400}$  et  $\frac{5400}{2568}$ .
6. Donner le nombre de diviseurs de 5400.

## Exercice 2

Soit  $p$  un entier naturel premier différent de 2.  
Montrer que  $p + 1$  n'est pas premier.

## Exercice 3

Soient  $m$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $m \geq p$ , montrer que:

1.  $(m + p)^3 - p^3$  multiple du nombre  $m$ .
2.  $(m + p)^3 + (m - p)^3$  multiple du nombre  $2m$ .

## Exercice 4

Soit  $n$  un entier naturel.

On pose  $a = \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 6}$

1. (a) Vérifier que  $n^2 - 5n + 6 = (n - 2)(n - 3)$   
(b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N} : 5n \leq n^2 + 6$
2. Montrer que:  $a = 1 - \frac{5n}{n^2 + 6}$
3. Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tels que  $a$  soit un entier naturel.

## Exercice 5

Dans un lycée, il y a 986 élèves garçons et 408 filles.  
On veut former des classes mixtes de telle sorte qu'il y ait le même nombre de garçons dans chaque classe, et le même nombre de filles dans chaque classe.  
On veut former bien que tous les élèves soient dans des classes.

1. Quel est le nombre maximal de classes pouvant être formées ?
2. Donner alors la composition de chaque classe.

## Exercice 6

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A = 5^{n+2} - 5^n$  et soit  $B = 3^{n+3} + 3^n$

1. Ecrire le nombre  $A$  sous forme de produit des facteurs premiers.
2. Montrer que  $A$  est divisible par 6.
3. Ecrire le nombre  $B$  sous forme de produit des facteurs premiers.
4. Montrer que  $B$  est divisible par 14.

## Exercice 7

Montrer que si 6 divise  $x + y + z$  alors 6 divise  $x^3 + y^3 + z^3$ .

## Exercice 1 in English

PERFECT NUMBERS: A whole number is called a perfect number when the sum of its factors that are less than the number equals the number. For example, 6 is a perfect number, because  $1 + 2 + 3 = 6$ . Find the factors of 28. Then use addition to show that 28 is also a perfect number.

## Exercice 2 in English

CELL DIVISION: After 1 hour, a cell has divided to form another cell. In another hour, these two cells have divided so that four cells exist. In another hour, these four cells divide so that eight exist.

1. How many cells exist at the end of the fourth hour?
2. The number of cells that exist after each division can be found using an exponential expression.  
What is the base ?
3. Find the number of cells after 12 hours.