Limites des suites numériques

(Utiliser les suites géométriques et les suites arithmétiques pour étudier des exemples de suites de la forme: $u_{n+1} = au_n + b$, $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ et d'autres suites récurrentes simples)

Exercice 1:
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par: $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{3}{7}u_n + 8; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $v_n = u_n - 14; \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et v_0
2. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.
3. Déterminer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n
4. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{6u_n+4}{4u_n+6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 1$.
2. Etudier la monotonie de (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$
4. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_n - 1 \leq 3 \times (\frac{1}{5})^n$
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques)

Exercice 3:
On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{2u_n+5}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie 1:

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$ et déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : |2u_{n+1} + 1| \leq \frac{6}{7}|2u_n + 1|$
4. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : |2u_n + 1| \leq \frac{1}{4}(\frac{6}{7})^n$.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie 2:
On considère la suite $(v_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{2u_n+2}{2u_n+1}$

1. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2u_k+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
5. Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(Déterminer la limite d'une suite convergente (u_n) de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$)

Exercice 4:
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^4 + 5)$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I telle que:

$$I = [0; +\infty[\text{ et } f(x) = \frac{1}{6}(x^4 + 5)$$

Partie 1:

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
3. (a) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} > u_n$
   (b) Déduire que $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle est convergente.
4. Calculer $\lim u_n$.

Partie 2:

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{3}|x - 1|$
2. Déduire que tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{3})^n$
3. Retrouver le résultat de la question 4 Partie 1.

(Utiliser les suites pour résoudre des problèmes variés de différents domaines)

Exercice 5:
Quel est le nombre total de grains que contient un damier de 64 cases si, partant de la première case portant un grain, sur chaque case successive on double le nombre de grains ?
Exercice 6:
Exercice 7:
Exercice 8:
Exercice 9: