Continuité d'une fonction numérique

(Déterminer image d'un intervalle)

Exercice 1:
Soit f une fonction définie sur $]-3,+\infty[$ par: $f(x)=\frac{2x+1}{x+3}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)$
2. Calculer $f(]-3,+\infty[)$ et $f\circ f(]-3,+\infty[)$

(Application du théorème des valeurs intérmidiares)

Exercice 2:
On cherche le nombre de solutions de l'équation:

$$(E): x^4+3x^3+x^2+1=0$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^4+3x^3+x^2+1$

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x)=x(x+2)(4x+1)$
   (b) Calculer les limites: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation (E)

Exercice 3:
Soit f la fonction numérique définie par:

$$f(x)=x^4-\frac{4}{x}$$

Montrer que la fonction $f(x)=x$ admet au moins une seule solution dans l'intervalle $[1;2]$

Exercice 4:
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty,1[$, et g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $]1,+\infty[$, telles que f et g soient deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et ils existent deux éléments x_1 et x_2 de $\mathbb{R}_+^*$ vérifient: $x_1<x_2$, $f(x_1)=x_1$ et $g(x_2)=x_2$.

Montrer qu'il existe un élement x_3 de $]x_1,x_2[$ tel que:

$$f(x_3)g(x_3)=x_3$$

Exercice 5:
Soit f la fonction numérique définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
Montrer que si la fonction f ne s'annule pas dans I, alors:

$$(\forall x\in I)f(x)<0 \text{ ou } (\forall x\in I)f(x)>0$$

(La dichotomie)

Exercice 6:
Soit la fonction f définie sur $I=]-2,+\infty[$ par: $f(x)=-\frac{x^3}{x+2}$.

1. (a) Déterminer les limites $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
   (b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x)=\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur I.
2. (a) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans l'intervalle I puis montrer que $-1,5<\alpha<0$
   (b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement de 10^{-4} de α ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir.

(Fonctions réciproques)

Exercice 7:
Démontrer que dans chaque cas suivant, la fonction f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J dont vous devez préciser, puis déterminer f^{-1} et dessiner la courbe de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.

- $f(x)=2x-5$, $I=\mathbb{R}$
- $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, $I=]2;+\infty[$
- $f(x)=x|x|$, $I=\mathbb{R}$
- $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$, $I=\mathbb{R}^+$

Exercice 8:
Soit f la fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ par ce qui suit:

$$f(x)=\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}$$

Démontrer que f est une bijection de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, déterminer alors sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 9:
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

- $\sqrt{x^2-4}=x-2\sqrt{x^2-1}$
- $x^3+8=0$
- $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x=63$
- $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$
- $(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}})^3+125=0$
- $\sqrt[3]{(1+x)^2}+2\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{1-x^2}$