Devoir à domicile

Exercice 1: (10 minutes)

Etudier la continuité de la fonction f définie par ce qui suit en $x_0 = -2$

$$f(x) : \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x^3+8} & \text{, Si } x > -2 \\ \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} & \text{, Si } -6 < x < -2 \\ f(-2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Exercice 2: (20 minutes)

Calculer les limites suivantes:

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+2}-2}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+24}-3}{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (x - \sqrt[3]{1-x^3})$

Exercice 3: (10 minutes)

Soit f une fonction continue sur $[0;2]$ avec $f(0) > 0$ et $f(2) < 4$:
Montrer qu'il existe un nombre $c \in [1;2]$ qui vérifie:

$$f(c) = c^2$$

Exercice 4: (40 minutes)

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est: $D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Etudier la dérivabalité de f à gauche en 0.
   Interpréter le résultat géométriquement.
4. Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$, puis donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Donner l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 2$.
6. Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un point unique dont l'abscisse α vérifie: $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.
7. Montrer que: $\alpha - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 1$.
8. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]1, +\infty[$:
   (a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Donner le tableau de variation de la fonction g^{-1}.
   (c) Calculer: $(g^{-1})^{'}(0)$.

Exercice 5: (40 minutes)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que: $\forall x > 1$ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
   (b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3. (a) Montrer que: $\forall x > 1$ $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

   (b) Donner le tableau de variations de f.

4. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

5. (a) Montrer que: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) = \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

6. Construire la courbe de $(\mathcal{C}_f)$.

7. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

   (b) Construie la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.