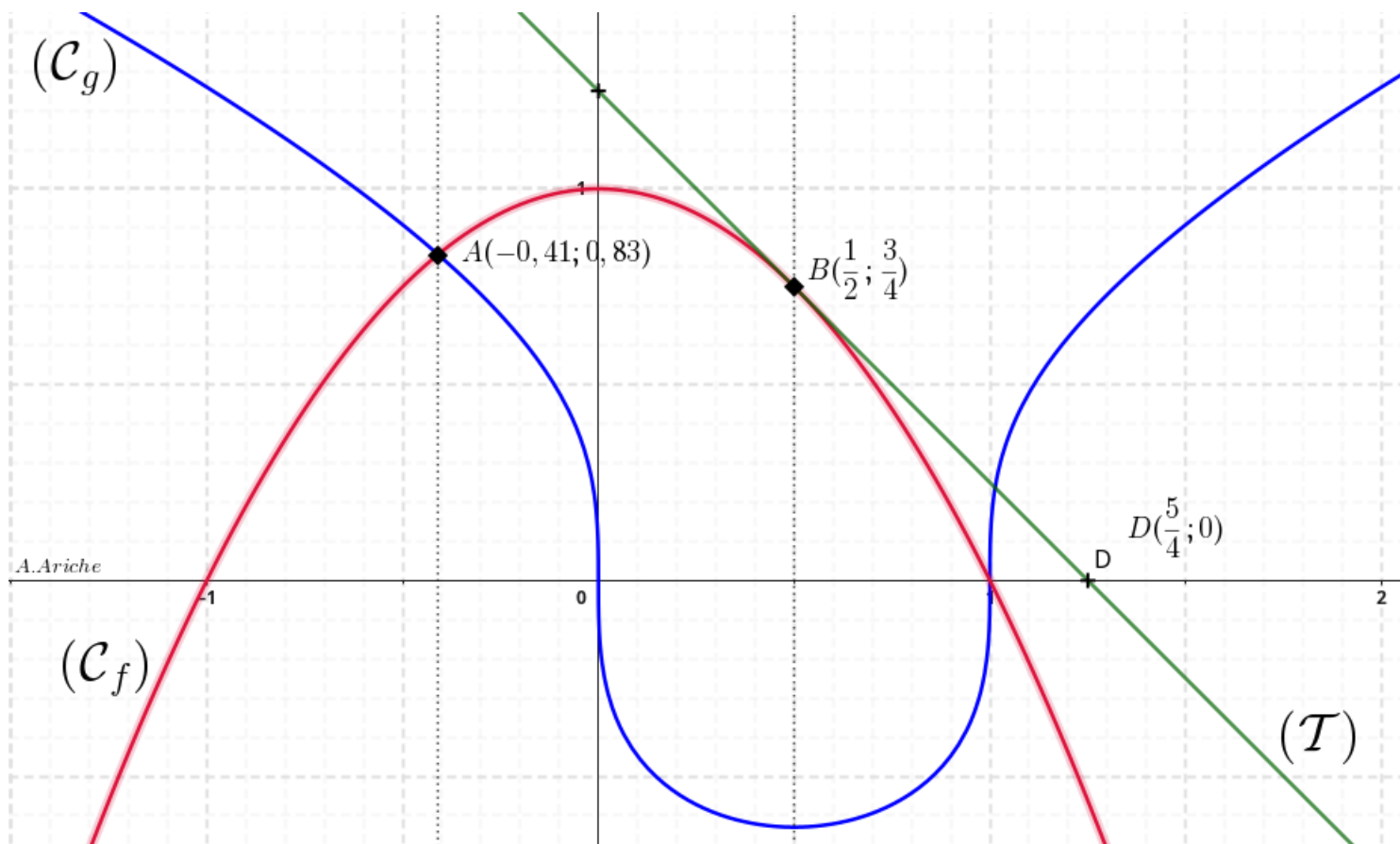


## Correction de devoir surveillé 1 S1

### Exercice 1 (6,5 pts):



1. D'après la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$ , on remarque aisément que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ = 1$$

2. D'après la figure, la droite  $(T)$  est tangente de la courbe  $(C_f)$  au point  $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ;  
Donc, d'après le cours, le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de  $f$  en  $x = \frac{1}{2}$ .  
Comme la droite  $(T)$  est la même droite  $(BD)$  de coefficient directeur  $m_{(BD)}$ :

$$f'(\frac{1}{2}) = m_{(BD)} \\ = \frac{\frac{5}{4} - 0}{0 - \frac{5}{4}} \\ = -1$$

3. Le nombre  $0.499 \simeq \frac{1}{2}$

Utilisons l'approximation locale de la fonction  $f$  par une fonction affine en  $x = \frac{1}{2}$ :

$$f(x) \simeq (x - \frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) \\ \simeq -(x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}$$

D'où:

$$\begin{aligned} f(0,499) &= -(0,499 - 0,500) + 0,750 \\ &= -(-0,001) + 0,750 \\ &= 0,751 \end{aligned}$$

4. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ , et puisque la fonction  $g$  est continue en  $x = 1$ , et  $g(1) = 0$  d'après la courbe, alors:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ h(x) &= g(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Toujours, d'après la figure: la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  admet deux demi tangentes verticales à gauche et à droite des deux nombres 0 et 1, on conclut que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$$

D'où, la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$  et  $x = 1$

6. Sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , on voit sur la figure que la fonction  $g$  n'est pas strictement monotone, d'où la conclusion cherchée.
7. L'ensemble des solutions de l'inéquation  $g(x) - f(x) < 0$  est l'union des intervalles où la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est au dessus de la courbe  $(\mathcal{C}_g)$ .  
Selon la figure, cette union est la seule intervalle:  $] - 0.41; 1[$ .
8. L'ensemble des solutions de l'inéquation  $g'(x) \times f'(x) < 0$  est l'union des intervalles où les deux fonctions aient deux monotonies différentes.  
 $S = ] - \infty, 0[ \cup ] \frac{1}{2}, +\infty[$

### Exercice 3 (9,5 pts):

1. Calculons  $f(2 - x)$

On a:

$$\begin{aligned} f(2 \times 1 - x) &= f(2 - x) \\ &= \frac{(2 - x)^2 + (2 - x) + 1}{(2 - x) - 1} \\ &= \frac{4 - 4x + x^2 + 2 - x + 1}{1 - x} \\ &= \frac{6 - 6x + x^2 + x + 1}{1 - x} \\ &= \frac{6(1 - x)}{1 - x} - \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \\ &= 6 - f(x) \\ &= 2 \times 3 - f(x) \end{aligned}$$

D'où  $f(2a - x) = 2b - f(x)$  tels que  $a = 1$  et  $b = 3$ ,  $\Omega(1, 3)$  centre de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

2. •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  par symétrie centrale  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$  par symétrie cenrale  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

$(\mathcal{C}_f)$  admet alors une droite asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

3.  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $c = 3$ .

4. Puisque la fonction  $f$  a pour expression  $x \mapsto x + 2 + \frac{3}{x-1}$ , alors:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où: La droite d'équation  $y = x + 2$  est une droite asymptote oblique pour  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$

5. La dérivée de  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - 3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1 - 3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

|                        | $1 - \sqrt{3}$ |   | 1 | $1 + \sqrt{3}$ |   |   |
|------------------------|----------------|---|---|----------------|---|---|
| $(x - (1 + \sqrt{3}))$ | −              | − |   | −              | • | + |
| $(x - (1 - \sqrt{3}))$ | −              | • | + | +              |   | + |
| $\text{signe}(f')$     | +              | • | − | −              | • | + |

6. Le tableau de variations:

| $x$     | $-\infty$ | $1 - \sqrt{3}$    | 1         | $1 + \sqrt{3}$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +                 | •         | -                 |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(1 - \sqrt{3})$ | $+\infty$ | $f(1 + \sqrt{3})$ | $+\infty$ |

7. Comparons d'abord, 8 et  $f(1 + \sqrt{3})$ :

On a:

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt{3}) &= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + 3 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} 25 &> 12 \\ 5 &> 2\sqrt{3} \\ 8 &> 3 + 2\sqrt{3} \\ 8 &> f(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Intuitivement, la courbe de la fonction ( $\mathcal{C}_f$ ) passe par  $y = 8$  en descendant dans l'intervalle  $]1; 1 + \sqrt{3}[$ , et repasse pour la deuxième fois par  $y = 8$  en ascendant dans l'intervalle  $]1 + \sqrt{3}; +\infty[$

Appliquons le TVI dans la première intervalle:  $]1; 1 + \sqrt{3}[$

Posons  $g$  la fonction définie par:  $g(x) = f(x) - 8$  et choisissons  $\alpha \in ]1; 1 + \sqrt{3}[$  le nombre tel que,  $f(\alpha) > 8$

Remarquons alors que:  $g(\alpha) \times g(1 + \sqrt{3}) < 0$ , puisque  $g$  est une fonction strictement monotone, on vérifie alors que  $g(x) = 0$  admet une seule solution dans  $]1, 1 + \sqrt{3}[$  et ainsi pour l'équation  $f(x) = 8$

On travaille de même façon dans l'intervalle  $]1 + \sqrt{3}; +\infty[$ .

Conclusion:  $f(x) = 8$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

8. (a) D'après la figure, la fonction  $h$  est continue et strictement croissante, donc  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$   
 $J = ]h(4), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$   
Donc  $J = ]7; +\infty[$