

La logique

1 Vrai ou faux

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies.

- 3 divise 171 ou 3 n'est pas premier
- tous les nombres pairs sont divisible par 2 et tous les nombres impairs sont divisible par 3.
- $\forall x \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \text{ ou } x \neq 4)$
- $(\forall x \in \mathbb{R} \ x \neq 1)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \ x \neq 4)$
- $(\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 - 16 = 0)$

2 Négation d'une proposition

Nier chacune des propositions suivantes:

- $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ x \geq y$
- $\forall \epsilon > 0 \ \exists \alpha \in]0; 1[: \forall x \in \mathbb{R} \ |x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \epsilon$
- Tous les gens de Tiflet sont des commerçants ou fonctionnaires, et ils ont des yeux noirs.

3 Les lois logiques

En utilisant la table de vérité, montrer que chacune des propositions suivantes est une loi logique.

- $\overline{(\overline{p})} \Leftrightarrow p$
- $\text{non}(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$
- $\text{non}(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$

4 Raisonnements

Exercice 1

- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Exercice 2

- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, (12)^n - 1$ est divisible par 11
- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 9^n + 5^n - 2$ est divisible par 4.

Exercice 3

Montrer par contre exemple que la proposition suivante est fausse:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$$

Exercice 4

A l'aide d'un raisonnement par contraposé, démontrer que:

- Si, $n^2, n \in \mathbb{N}$, est impair, alors n est impair.
- Si $\forall \epsilon > 0 \ a \leq \epsilon$ alors $a \leq 0$ ($a \in \mathbb{R}$)
- Soit a un réel, Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.

Exercice 5

A l'aide d'un raisonnement par absurde, montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier ($n \in \mathbb{N}^*$)

5 Enigmes

Exercice 6

Quatre amis visitent un musée avec seulement 3 billets d'entrée. Ils rencontrent un gardien qui veut savoir celui qui n'a pas payé son entrée :

- Ce n'est pas moi, dit Paul.
- C'est Jean, dit Jacques.
- C'est Pierre, dit Jean.
- Jacques a tort, dit Pierre.

Sachant qu'un seul d'entre eux ment, quel est le resquilleur ?

Exercice 7

Sept personnes se rencontrent et se serrent la main. Sachant que chaque personne a donné la main une et une seule fois à chaque autre personne, combien de poignées de mains y a-t-il eu ?

Exercice 8

Monsieur Green, Monsieur Red et Monsieur Blue prenaient un verre du thé au restaurant de Fred. L'un portait un costume rouge, l'autre un vert et le troisième un bleu. "Avez-vous remarqué dit l'homme en costume bleu, que bien que la couleur de nos costumes corresponde à nos noms, aucun d'entre nous ne porte un costume dont la couleur corresponde à son propre nom?" Monsieur Red regarda les deux autres et dit: "Vous avez tout à fait raison." Quelle est la couleur du costume de chacun de ces hommes ?