

TD – LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

avec Exercices avec solutions

PROF : ABDELILLAH ARICHE | 1BAC SM BIOF

<https://abdolive.com>

Exercice 1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1. $P : “\forall x \in \mathbb{R}/x^2 > 0”$
2. $P : “\exists x \in \mathbb{R}/x^2 - 2 = 0”$
3. $P : x \in [1; 2[$
4. $P : “\forall n \in \mathbb{N}/\frac{n}{2} \in \mathbb{N}”$
5. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$
6. $P : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n < m$
7. $P : (\exists n \in \mathbb{N}) 2n + 1$ est pair
8. $P : (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
9. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y - x > 0$
10. $P : (\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$
11. $P : (\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$
12. $P : (\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$
13. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 = x$

Exercice 2 : Écrire à l’aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n’est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d’entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 : $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$

Exercice 4 : $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

Exercice 5 :

1. Montrer que : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$
2. $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

Exercice 6 : Montrer que :

$$(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 7 : Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 8 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$. Montrer que :

$$|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}|x - 1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x - 1|$$

Exercice 9 : Montrer que :

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 10 : Montrer que :

$$\forall x \in [-2; 2] : 2\sqrt{2} > \sqrt{4 - x^2}$$

Exercice 11 : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq x^2 - x + 1$$

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’inéquation (E) :

$$1 - \frac{x}{4} > \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Exercice 13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’inéquation (I) :

$$|x - 1| + 2x - 3 \geq 0$$

Exercice 14 : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

Exercice 15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’équation :

$$x^2 - |x - 2| + 5 = 0$$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 : $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

Exercice 18 : $x \in \mathbb{R}, x \neq -5$. Montrer que :

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Exercice 21 : Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 22 : Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Exercice 23 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$. Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

Exercice 24 : Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 25 : Soient $a, b \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
2. En déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Exercice 26 : On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; n\}$ avec n un nombre entier impair. Soient $x_1; x_2; \dots; x_n$ des éléments de l'ensemble A distincts deux à deux. Montrer que : $\exists i \in A/x_i - i$ est pair.

Exercice 27 : Montrer que la proposition P : $(\forall x \in [0; 1]) : x^2 \geq x$ est fausse.

Exercice 28 : Montrer que la proposition P : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \geq x + y$ est fausse.

Exercice 29 : Montrer que la proposition P : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ est fausse.

Exercice 30 : Montrer que la proposition suivante est fausse : "Tout entier positif est somme de trois carrés". (Exemple : $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$).

Exercice 31 : Montrer que la proposition P : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2$ est fausse.

Exercice 32 : On considère $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 33 : Montrer que la proposition P : $\forall (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a + c \neq b + d$ est fausse.

Exercice 34 : Montrer que la proposition P : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 - xy + y^2 = 0$ est fausse.

Exercice 35 : Montrer que $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 36 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x-1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$

Exercice 37 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{x^2 + 1} = 2x$.

Exercice 38 : $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $|x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$.

Exercice 39 :

1. Montrer que : $(\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2); a + b = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.
2. Montrer que : $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0$.

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1 + 2n$.

Exercice 41 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 42 : Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$.

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3.

Exercice 44 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 45 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 46 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 49 (Erreur classique) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère : $P(n) : 10^n - 1$ divisible par 9 et $Q(n) : 10n + 1$ divisible par 9.

1. Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
2. Démontrer que si $Q(n)$ est vraie alors $Q(n+1)$ est vraie.
3. Expliquer l'erreur commise par un élève affirmant que $Q(n)$ est vraie pour tout n .
4. Démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que $Q(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 50 : Soit $P(n) : 7^n - 1$ divisible par 3.

1. Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 51 : Soient $a \in]-1; 1[$ et $b \in]-1; 1[$. Montrer que : $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

Exercice 52 : Traduisez en langage courant puis déterminer la négation et la valeur de vérité :

1. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$
2. $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$
3. $P : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 4x - 4$
4. $P : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$
5. $P : (\forall \epsilon > 0); (\exists x \in \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}) / x < \epsilon + 10$

Exercice 53 : À l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formule $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.

Exercice 54 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est divisible par 2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
4. Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?
5. Fixons $a > 0$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na$.

— AUTRES EXERCICES —

Exercice 1 : Écrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rapides sont rouges.
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.
4. Pour tout entier x , il existe un entier y tel que pour tout entier z , la relation $z < y$ implique $z < x+1$.
5. Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.
6. a) $(P \text{ et } Q)$ b) $(\text{non } P \text{ et non } Q)$ c) $(P \Rightarrow Q)$

Exercice 2 : Soient p : “les chiens aboient” et q : “la caravane passe”. Traduisez :

- a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- b) Les chiens n'aboient pas.
- c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer par récurrence :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n^5 - n$ est divisible par 30.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité :

1. $(3 \text{ est impair}) \wedge (6 \text{ est premier})$
2. $(\sqrt{2} \text{ est irrationnel}) \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{R})(1+2x < x^2)]$
3. $(5 \text{ est positif}) \Rightarrow (3 \text{ divise } 18)$

Exercice 5 :

1. Condition nécessaire et non suffisante pour : a) $x \in [1, 2]$ b) n divise 6.
2. Condition suffisante et non nécessaire pour : a) $x \in [1, 2]$ b) n divise 6.

Exercice 6 : Étudier la vérité :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x + 3 > 0$
2. $\forall (a; b) \in \mathbb{Q}^{*2} : a\sqrt{2} + b \neq 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 7 : Écrire la négation :

1. $(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2019$
2. $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

Exercice 8 : Écrire avec quantificateurs :

1. “Pour tout nombre réel, son carré est positif”.
2. “Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1”.
3. “Pour tout entier n , il existe un unique réel x tel que $x > n$ ”.

Exercice 9 : Écrire avec quantificateurs et donner la valeur de vérité :

1. Tout entier naturel est pair ou impair.
2. Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

Exercice 10 : Par contraposée, montrer que si $x, y \in]1; +\infty[$:

$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$$

Exercice 11 : Étudier la vérité :

1. $\exists x \in \mathbb{R} : |x^2 - x| + 3x = 0$
2. $\exists x > 0 : x^2 + 3x = 0$

Le savoir emprunté est une illusion.