

Notations et Logique Mathématique

Envie de maîtriser les ruses de la logique et réussir vos rédactions ?

La logique est le fondement des mathématiques. Pour vérifier vos réponses, découvrir les astuces de résolution et consulter des explications pas à pas en vidéo, visitez www.abdolive.com ou flashez le QR code ci-contre.



Vrai ou Faux

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 3 divise 171 ou 3 n'est pas premier.
2. Tous les nombres pairs sont divisibles par 2 et tous les nombres impairs sont divisibles par 3.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \text{ ou } x \neq 4)$.
4. $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 4)$.
5. $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0)$.

Négation d'une proposition

Nier chacune des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
2. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha \in]0; 1[: \forall x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \epsilon$
3. Tous les gens de Tiflet sont des commerçants ou fonctionnaires, et ils ont des yeux noirs.

Les lois logiques

En utilisant la table de vérité, montrer que chacune des propositions suivantes est une loi logique :

1. $\overline{(\overline{p})} \Leftrightarrow p$
2. $\text{non}(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)$
3. $\text{non}(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$

Modes de raisonnement

Exercice 1 (La récurrence) :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Exercice 2 (La récurrence) :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 12^n - 1$ est divisible par 11.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 9^n + 5^n - 2$ est divisible par 4.

Exercice 3 (Contre-exemple) : Montrer par contre-exemple que la proposition suivante est fausse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$$

Exercice 4 (Contraposée) : À l'aide d'un raisonnement par contraposée, démontrer que :

1. Si n^2 ($n \in \mathbb{N}$) est impair, alors n est impair.
2. Si $(\forall \epsilon > 0, a \leq \epsilon)$, alors $a \leq 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
3. Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.

Exercice 5 (Absurde) : À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier ($n \in \mathbb{N}^*$).

Énigmes et réflexion

Exercice 6 : Quatre amis visitent un musée avec seulement 3 billets d'entrée. Ils rencontrent un gardien qui veut savoir celui qui n'a pas payé son entrée :

- « Ce n'est pas moi », dit Paul.
- « C'est Jean », dit Jacques.
- « C'est Pierre », dit Jean.
- « Jacques a tort », dit Pierre.

Sachant qu'un seul d'entre eux ment, quel est le resquilleur ?

Exercice 7 : Sept personnes se rencontrent et se serrent la main. Sachant que chaque personne a donné la main une et une seule fois à chaque autre personne, combien de poignées de mains y a-t-il eu ?

Exercice 8 : Monsieur Green, Monsieur Red et Monsieur Blue prenaient un verre de thé au res-

taurant de Fred. L'un portait un costume rouge, l'autre un vert et le troisième un bleu.

« Avez-vous remarqué, dit l'homme en costume bleu, que bien que la couleur de nos costumes corresponde à nos noms, aucun d'entre nous ne porte un costume dont la couleur corresponde à son propre nom ? »

Monsieur Red regarda les deux autres et dit : « Vous avez tout à fait raison. »

Quelle est la couleur du costume de chacun de ces hommes ?