

Généralités sur les fonctions

1. Domaine de définition

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt{x+2}$
3. $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$
4. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{|x+1|}}$
6. $f(x) = \sqrt{x - |x+2|}$

2. Parité d'une fonction

Exercice 2

Étudier la parité de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$
3. $f(x) = \frac{|x|-3}{|x|+1}$
4. $f(x) = \frac{x-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
5. $f(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^2+4}$

3. Fonction bornée

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$

1. Montrer que f est paire.
2. Vérifier que : $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que : $\frac{1}{3} \leq f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Composée de deux fonctions et comparaison

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = -x^2 + x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f et g .
2. Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.
3. Montrer que : $f(x) - g(x) = (1-x) \left(x + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$.
4. En déduire une comparaison de f et g sur $]1, +\infty[$.

5. Monotonie d'une fonction

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire.
2. 1. Vérifier que : $T = \frac{1-ab}{(a^2+1)(b^2+1)}$.
2. Montrer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $[0, 1]$.
3. En déduire la monotonie de f sur $] -\infty, 0]$ et sur $[-1, 0]$.