

Continuité d'une fonction numérique

Une difficulté ou envie de maîtriser parfaitement les méthodes ?

Chaque exercice recèle des astuces clés indispensables pour l'examen. Pour comprendre pas à pas les étapes de résolution, perfectionner votre rédaction et consulter les corrigés interactifs, rendez-vous sur www.abdolive.com ou flashez le QR code ci-contre.



Déterminer l'image d'un intervalle

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur $] - 3, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x)$
2. Calculer $f(] - 3, +\infty[)$ et $f \circ f(] - 3, +\infty[)$

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 2 : On cherche le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) : x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = x(x+2)(4x+1)$
 b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation (E)

Exercice 3 : Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{x}$$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 2]$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $] - \infty, 1[$, et g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $]1, +\infty[$, telles que f et g soient deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 de $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $x_1 < x_2$, $f(x_1) = x_1$ et $g(x_2) = x_2$.

Montrer qu'il existe un élément x_3 de $]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_3)g(x_3) = x_3$$

Exercice 5 : Soit f la fonction numérique définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction f ne s'annule pas dans I , alors :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) < 0 \quad \text{ou} \quad (\forall x \in I) \quad f(x) > 0$$

La dichotomie

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur $I =] - 2, +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{x^3}{x+2}$.

1. a) Déterminer les limites $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$
 c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur I .
2. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle I puis montrer que $-1,5 < \alpha < 0$.
 b) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir.

Fonctions réciproques

Exercice 7 : Démontrer que dans chaque cas suivant, la fonction f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J que vous devez préciser. Puis, déterminer f^{-1} et dessiner la courbe de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.

- $f(x) = 2x - 5, I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, I =]2; +\infty[$
- $f(x) = x|x|, I = \mathbb{R}$
- $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}, I = \mathbb{R}^+$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur un

intervalle $]a, b[$ par ce qui suit :

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$

Démontrer que f est une bijection de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, déterminer alors sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$
- $x^3 + 8 = 0$
- $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x = 63$
- $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$
- $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 + 125 = 0$
- $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 2\sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2}$